# 1.1.25 Vektory I

**Předpoklady:** 010124

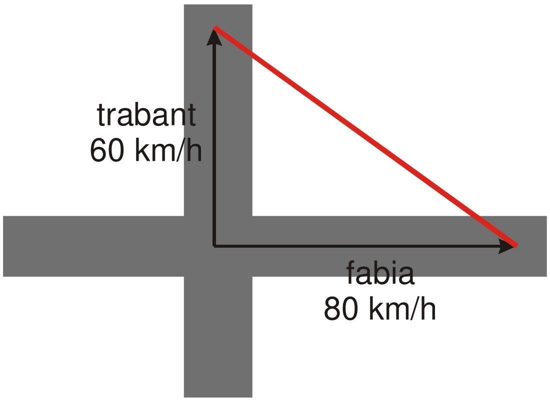
**Pedagogická poznámka:** První příklad je řešení domácího úkolu z minulé hodiny.

**Pedagogická poznámka:** V první části hodiny je třeba postupovat poměrně rychle, aby ještě ve škole pod dohledem učitele žáci stihli příklad 7.

**Př. 1:** Z pravoúhlé křižovatky dvou silnic vyjela dvě auta: fabie rychlostí 80 km/h a trabant rychlostí 60 km/h. Jak rychle se od sebe vzdalují?

Příklad nemá jediné řešení:

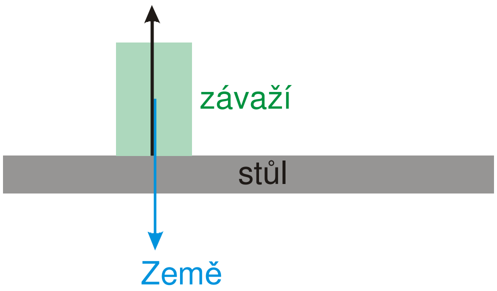
- Pokud auta jedou proti sobě vzdalují se od sebe rychlostí $60+80\,\text{km/h}=140\,\text{km/h}$.
- Pokud auta jedou stejným směrem vzdalují se od sebe rychlostí $80-60\,\text{km/h}=20\,\text{km/h}$.
- Pokud jsou směry pohybu aut na sebe kolmé, vzdalují se rychlostí: $v_v=\sqrt{v_f^2+v_t^2}=\sqrt{80^2+60^2}\ \text{km/h}=100\,\text{km/h}$.




V předchozím příkladu jsme měli velké štěstí. Kdyby auta nejela po silnicích, bylo by výsledků nekonečně mnoho.
$\Rightarrow$ Čísla, kterými jsme udávali velikosti rychlostí, neříkají o rychlosti všechno.

**Př. 2:** Vyřeš následující příklady.
a) Na stole je položeno závaží o hmotnosti 2 kg. Na závaží působí gravitační síla Země o velikosti 20 N a tlaková síla od stolu o velikosti 20N. Jaká výsledná síla působí na závaží?
b) Vedle prvního závaží položíme na stůl druhé závaží o hmotnosti dvou kilogramů. Jaká je celková hmotnost závaží položených na stole nyní?
c) Jakou celkovou silou tlačí obě závaží z předchozího příkladu na stůl?

a)

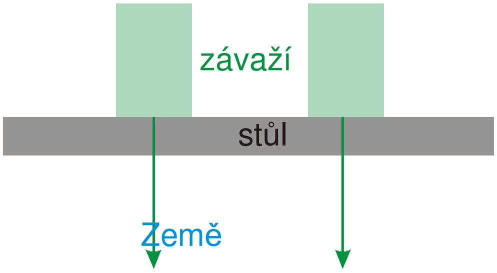



Síly jsou stejně velké a působí proti sobě $\Rightarrow$ výslednice je nulová.

b)

Celková hmotnost závaží položených na stole je 4 kg.

c)




Obě závaží tlačí silou 20 N stejným směrem $\Rightarrow$ závaží působí na stůl celkovou silou 40 N.

**Poznámka:** Protože každé ze závaží působí na stůl v jiném místě, nemůžeme přímo říci, že se jejich síly skládají v jednu sílu o velikosti 40 N.

**Pedagogická poznámka:** Při výuce v prvním ročníku jsem s hrůzou zjistil, že předchozí příklad není pro studenty až tak jednoduchý. Většina z nich na první pokus napsala jako řešení bodu a) 40 N.

**Př. 3:** Zkus najít důvod, proč ses měl zabývat nedůstojně jednoduchým příkladem 2.

Zřejmě máme z předchozího příkladu vyvodit nějaké obecnější závěry.

V příkladu 2 jsme sčítali dvě veličiny:

- Sčítání hmotností proběhlo bez komplikací ($2+2=4$).
- Při sčítání dvou sil o stejné velikosti 20 N jsme získali dva rozdílné výsledky (0 N a 40 N), podle toho zda síly působily stejným směrem či nikoliv.

$\Rightarrow$ Existují dva druhy fyzikálních veličin:

- **skaláry** (například hmotnost) = veličiny, které mají pouze velikost (a proto se vždy sčítají), popisujeme je jediným číslem (velikostí),
- **vektory** (například síla nebo rychlost) = veličiny, které mají velikost a směr (někdy se sčítají, někdy se odčítají), jediné číslo na jejich kompletní zachycení nestačí
  vektory značíme tlustou kurzívou: $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{v}$.
  Pokud mluvíme pouze o velikosti vektoru používáme kurzívu normální: $F$, $v$.

**Pro znázorňování vektorů používáme šipky:**

- **délka šipky odpovídá velikosti vektoru,**
- **směr šipky odpovídá směru vektoru.**

**Některé fyzikální veličiny jsou určeny kromě velikosti i směrem (nazýváme je vektory). Při výpočtech s těmito veličinami nemůžeme vždy postupovat stejně jako při výpočtech s čísly.**

Silou fyziky je předpovídání, které provádíme pomocí matematických výpočtů. Pokud chceme cokoliv používat, musíme s tím umět provádět matematické operace.

- Skaláry neznamenají žádný problém. Jde o čísla a počítání s čísly z matematiky ovládáme dobře.
- Vektory: ? Zatím neumíme s vektory provádět žádné matematické operace.

**Př. 4:** Rohlíky v nákupní tašce působí na ruku nakupujícího kolmo dolů silou 2,7 N. Jak se tato síla změní, když bude počet rohlíků dvakrát větší? Kolik je v tašce rohlíků? Všechny rohlíky považujeme za přibližně stejné.

Dvakrát větší počet rohlíků, znamená dvakrát větší hmotnost a tím i dvakrát větší sílu. Směr síly se nezmění.

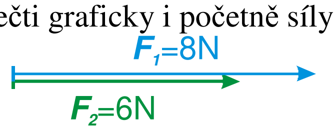
Pro gravitační sílu platí $F_g = mg \Rightarrow m = \frac{F_g}{g} = \frac{2,7}{10}\,\mathrm{kg} = 0,27\,\mathrm{kg}$. Celková hmotnost rohlíků je tedy 270 g. Pokud jde o klasické rohlíky s hmotností mezi 50 a 60 gramy, je jich v tašce zřejmě 5.

**Pedagogická poznámka:** Druhá otázka je samozřejmě skoro nefyzikální, na druhou stranu to vše vrací trochu na zem. Je však i nebezpečná, protože žáci v ní hledají něco důležitějšího než v ní je.

**Při násobení (dělení) vektoru skalární veličinou (tedy číslem) se vynásobí (vydělí) velikost vektoru skalární veličinou. Pokud násobíme (dělíme) číslem větším než nula směr vektoru se nemění. Pokud násobíme (dělíme) číslem menším než nula směr vektoru se obrací.**

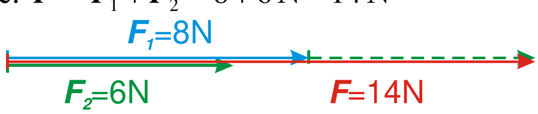
**Pedagogická poznámka:** Žáci by měli sčítání vektorů (ve formě sčítání sil) znát (a také se k tomu hlásí) ze ZŠ. Skutečnost však nebývá příliš veselá, proto je třeba projít příkladem 7 (převzatý z učebnice pro sekundu), kdy kreslí součty na namnožené papírky, aby byli schopni řešit i složitější příkladu (například b) je pro mnoho oříškem.

**Př. 5:** Sečti graficky i početně síly na obrázcích.

a) 


b) 

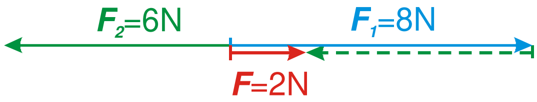

a) početně: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 8 + 6\,\mathrm{N} = 14\,\mathrm{N}$

graficky: 


Zelenou šipku postavíme za modrou.

b) početně: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_2 = 8 - 6\,\mathrm{N} = 2\,\mathrm{N}$

graficky:



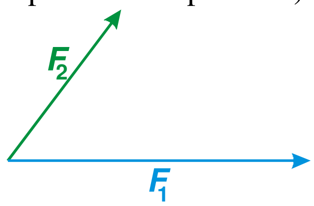

Zelenou šipku opět postavíme za modrou.

Je trochu divné, že v bodě b) píšeme při sčítání mezi vektory mínus. Je to tím, že máme špatně zapsanou hodnotu síly $\boldsymbol{F}_2$. Jde o vektor a musíme rozlišovat jeho směr. Protože směřuje proti vektoru $\boldsymbol{F}_1$ musí mít opačné znaménko $\Rightarrow$

b) $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 8 + (-6)\,\mathrm{N} = 2\,\mathrm{N}$.

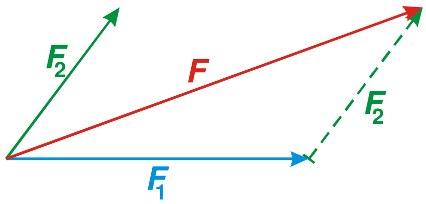
**Pedagogická poznámka:** U všech grafických součtů musíme zdůrazňovat, že jde o stále stejný postup, přesouváme jeden z vektorů tak, aby byl jeho počátek umístěn v koncovém bodě druhého vektoru.

**Př. 6:** Překresli obrázek do sešitu a sečti vektory graficky (stejným způsobem jako v předchozím příkladu).



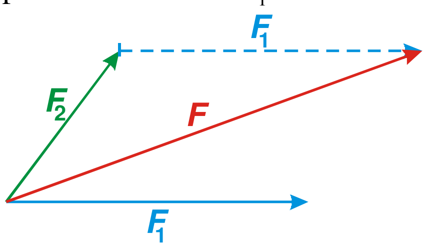

Vektory můžeme sčítat dvěma způsoby:

- přeneseme vektor $F_2$ za vektor $F_1$:



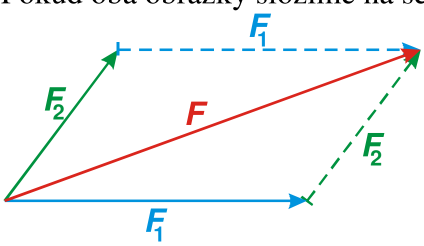

,

- přeneseme vektor $F_1$ za vektor $F_2$:

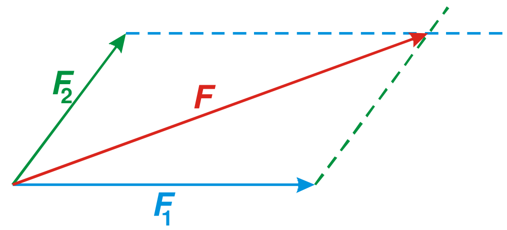



.

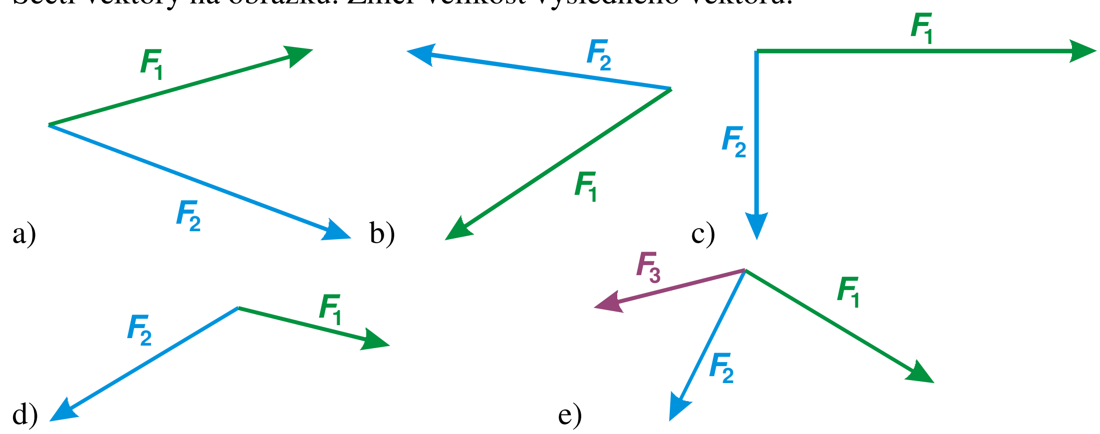
Pokud oba obrázky složíme na sebe, získáme rovnoběžník sil



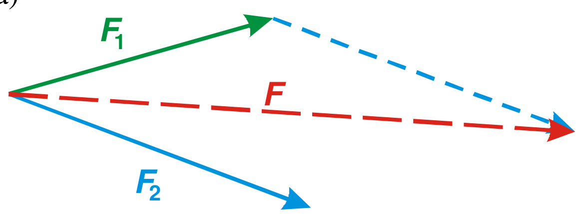

který můžeme ke skládání sil využívat místo přesouvání vektorů:




**Př. 7:** Sečti vektory na obrázku. Změř velikost výsledného vektoru.

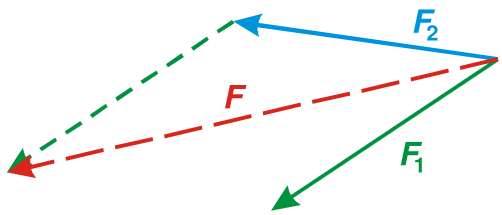



a)



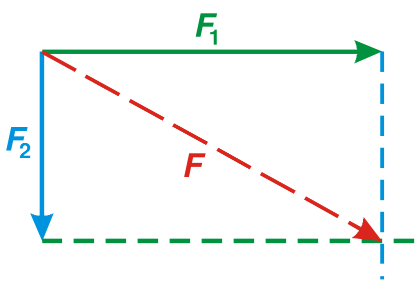

$|F| = 7{,}5\,\mathrm{cm}$

b)



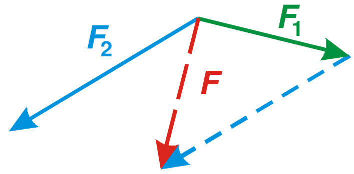

$|F| = 6{,}7\,\mathrm{cm}$

c)



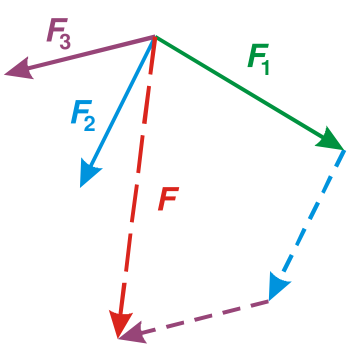

$|F| = 7{,}4\,\mathrm{cm}$

d)




$|F| = 2{,}1\,\mathrm{cm}$

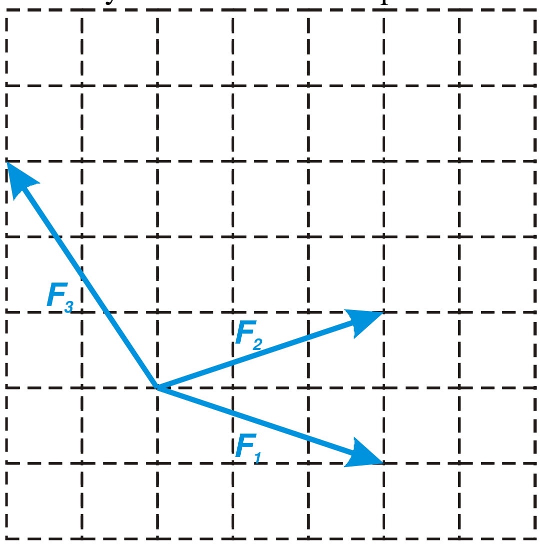
e)



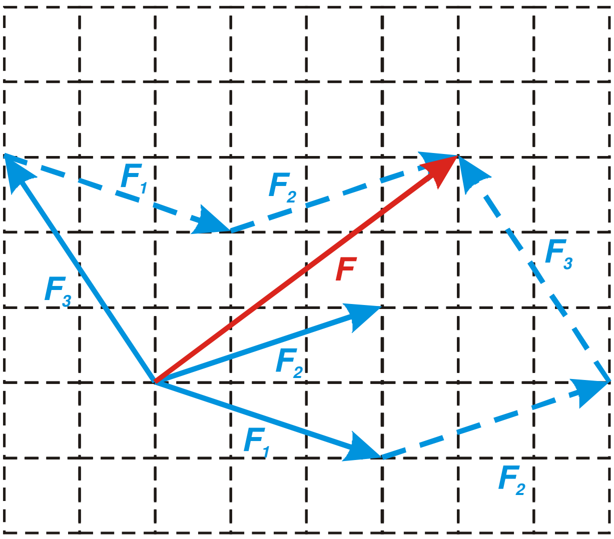
$|F| = 4\,\text{cm}$

**Pedagogická poznámka:** Následující příklady samozřejmě není možné v hodině stihnout. Snažíme vyřešit, co nejvíce, co si žáci dodělají doma záleží na nich.

**Př. 8:** Sečti síly na obrázku. Součet proveď dvakrát se dvěma různými pořadími sil.



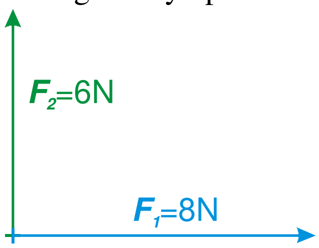

V obrázku jsou nakresleny dva možné součty: $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3$ a $\boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$:




V obou případech jsme získali stejný výsledek.

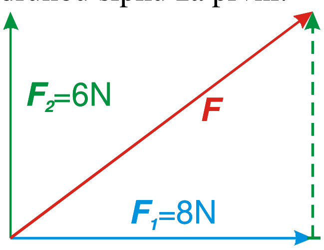
**Pedagogická poznámka:** V předchozím a v některých následujících příkladech jsou vektory kresleny do čtvercové sítě, aby studenti mohli dosáhnout stejných výsledků jako učitel pokud si obrázek překreslí do sítě v sešitu. Samozřejmě jim doporučuji, aby obrázek kvůli malým čtverečkům v sešitě zvětšili.

**Př. 9:** Sečti graficky i početně síly na obrázku.

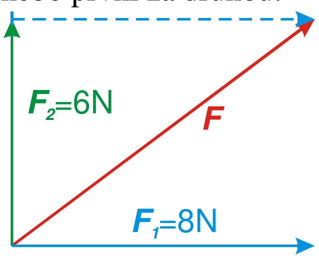



Stejně jako v předchozím příkladě můžeme dát:

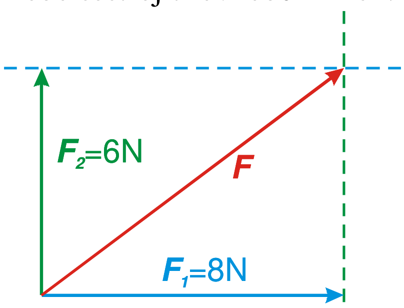
druhou šipku za první:



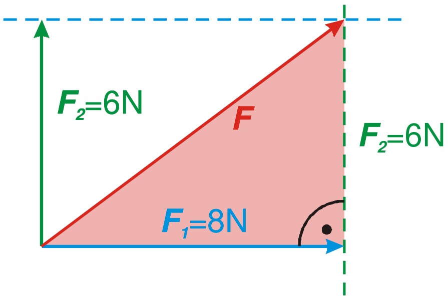

nebo první za druhou:




nebo sestrojit rovnoběžník sil.



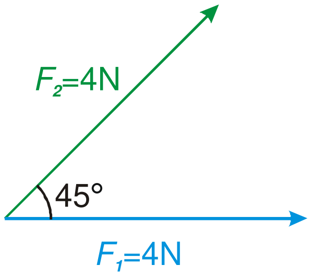

Početně určíme velikost výsledného vektoru pomocí pravoúhlého trojúhelníka.

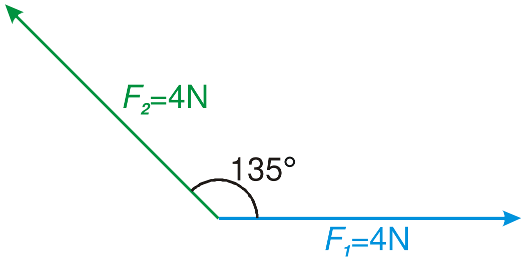


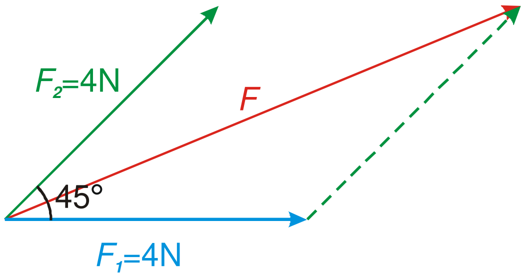

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2$$

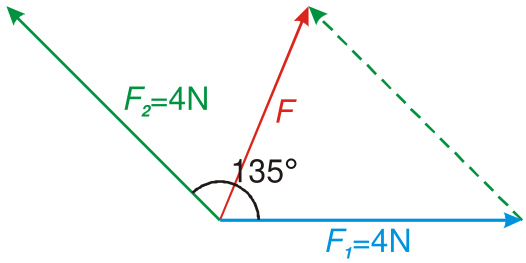
$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{6^2 + 8^2}\ \mathrm{N} = 10\ \mathrm{N}$$

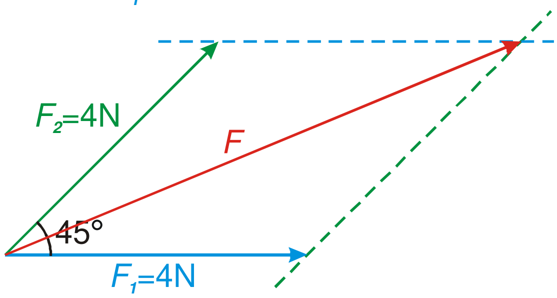
**Př. 10:** Sečti graficky (přesně pravítkem a úhloměrem) dvojice sil na obrázcích. Měřením urči velikost výslednice.



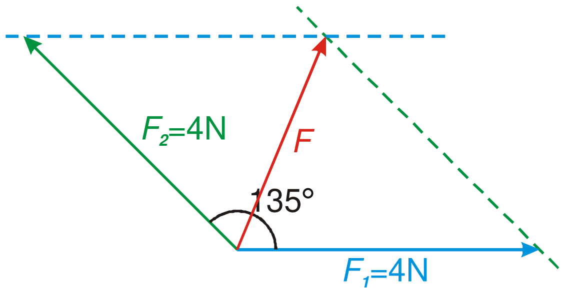



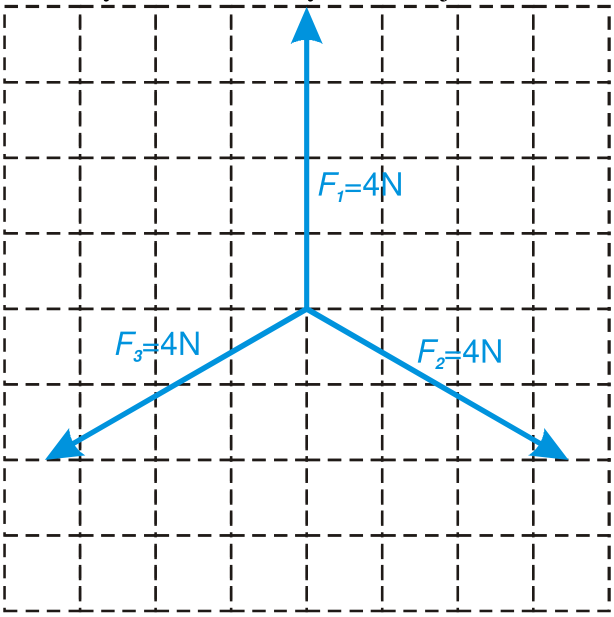

$F = 7{,}4\,\mathrm{N}$



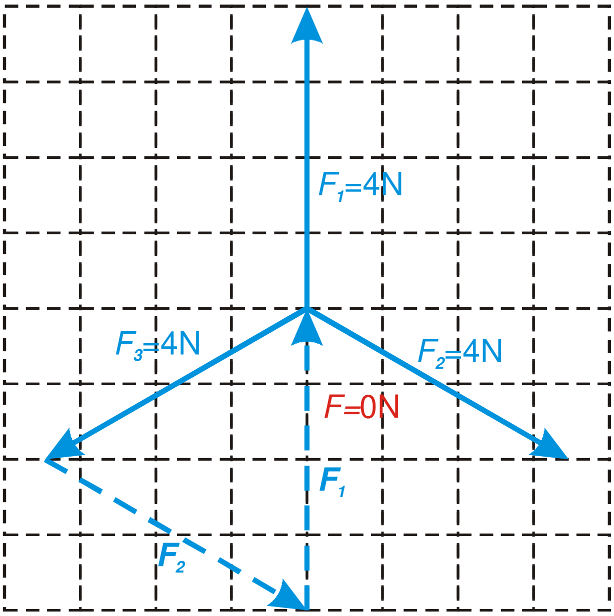

$F = 3{,}1\,\mathrm{N}$

**Pedagogická poznámka:** Pokud studenti mají doporučené čtverečkované sešity mohou takto zadané síly nakreslit přesně i bez úhloměru (nemusíte jim rovnou říkat jak). Pokud čtverečkovaný sešit nemají, je lepší, když obrázky obkreslují bez čtvercové sítě.

**Př. 11:** Sečti síly na obrázku. Výsledek nejdříve odhadni a poté ověř graficky.




Z obrázku se zdá, že součet všech tří sil bude nulový.

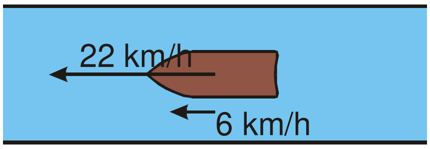



**Pedagogická poznámka:** Následující tři příklady v běžné hodině nestíháme. Jsou připraveny na konci hodiny pro případ, že někdy byl opravdu rychlý.

**Př. 12:** Motorový člun pluje se zapnutým motorem na jezeře rychlostí 22 km/h. Doplňte do tabulky velikosti rychlostí., pluje-li na řece, která teče rychlostí 6 km/h.

| | **rychlost vzhledem ke břehu** | **rychlost vzhledem k vodě** |
|---|---|---|
| **člun pluje po proudu** | | |
| **člun pluje proti proudu** | | |
| **člun má vypnutý motor** | | |

Ze břehu vidíme toto:

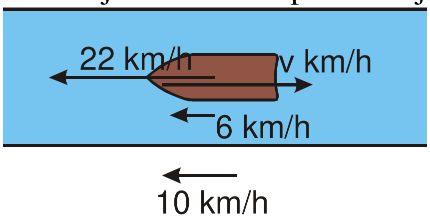



$\Rightarrow$ rychlost člunu vůči břehu získáme jako součet obou rychlostí $22+6\,\text{km/h}=28\,\text{km/h}$. Stejně doplníme zbytek tabulky:

| | **rychlost vzhledem ke břehu** | **rychlost vzhledem k vodě** |
|---|---|---|
| **člun pluje po proudu** | 28 km/h | 22 km/h |
| **člun pluje proti proudu** | 16 km/h | 22 km/h |
| **člun má vypnutý motor** | 6 km/h | 0 km/h |

**Př. 13:** Na člunu z předchozího příkladu se zapnutým motorem jedoucím po proudu běží kapitán od přídi k zádi. Z břehu mu byla naměřena rychlost o velikosti 10 km/h. Zjisti, jakou rychlostí kapitán běžel. Kolik má příklad řešení? Která z nich jsou reálná?

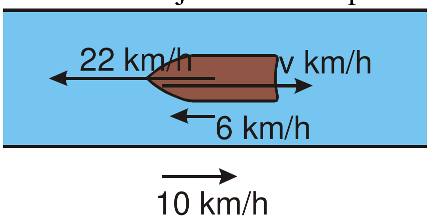
Situace je rozhodně nepřehlednější než v minulém příkladě $\Rightarrow$ obrázek je nezbytností:




rychlost, kterou vidíme ze břehu vznikla ze všech tří rychlostí dohromady. Musí platit $22+6-v=10 \Rightarrow v=18\,\text{km/h}$

Můžeme použít i rovnici bez záporného znaménka: $22+6+v=10 \Rightarrow v=-18\,\text{km/h}$ Při tomto výpočtu jsme postupovali vektorově, záporné znaménko u výsledné rychlosti znamená, že kapitán běžel v opačném směru, než jsou směry ostatních rychlostí. (stejný princip jsme používali pro zrychlení u rovnic rovnoměrně zrychleného pohybu).

18 km/h není jediné řešení příkladu. Obrázek může vypadat i takto:




$22+6-v=-10 \Rightarrow v=38\,\text{km/h}$

$22-6+v=-10 \Rightarrow v=-38\,\text{km/h}$

$\Rightarrow$ kapitán běžel rychlostí 38 km/h (což už je docela dost).

Pokud bychom chtěli, aby předchozí příklad měl jediné řešení, museli bychom jednoznačně říct, ve kterém směru jsme kapitánovi rychlost z břehu naměřili.

**Př. 14:** (BONUS) Dořeš předchozí příklad pro všechny možné situace uvedené v tabulce:

| | **rychlost kapitána vzhledem ke břehu** | **rychlost kapitána vzhledem k lodi** |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| **člun pluje po proudu** | 10 km/h | |
| **člun pluje proti proudu** | 2 km/h | |
| **člun má vypnutý motor** | 12 km/h | |

| | **rychlost kapitána vzhledem ke břehu** | **rychlost kapitána vzhledem k lodi** |
|---|---|---|
| **člun pluje po proudu** | 10 km/h | 18 km/h 38 km/h |
| **člun pluje proti proudu** | 2 km/h | 18 km/h 14 km/h |
| **člun má vypnutý motor** | 12 km/h | 18 km/h 6 km/h |

**Shrnutí:** Veličiny, které jsou dány směrem a velikostí nazýváme vektory. Tyto veličiny můžeme normálně sčítat pouze, když mají stejný směr, v ostatních případech si musíme pomoci graficky.